Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică
Concursul de admitere iulie 2009, Domeniul de licenta - *Informatică*

I. Algebră 1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ din $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Să se calculeze A^2 şi A^3.
b) Să se arate că A nu este inversabilă şi B este inversabilă. Să se calculeze B^{-1}.
c) Să se calculeze B^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Fie A mulţimea numerelor complexe de forma $a + bi$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$.
a) Să se arate că A este inel în raport cu adunarea şi înmulţirea numerelor complexe.
b) Să se determine elementele $u \in A$ cu $| u |= 1$.
c) Să se determine elementele $u \in A$ pentru care există $v \in A$ cu $uv = 1$.
d) Arătaţi că nu există $u \in A$ cu $| u |^2= 100003$.

II. Analiză 1. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
a) Să se studieze variaţia şi să se traseze graficul funcţiei precizând intervalele de convexitate.
b) Să se calculeze $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$.

2. Fie funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată astfel:

$$g(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{dacă } x \leq 0 \\ 4x - 2 + \ln(x^2 - x + 1) & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

a) Să se studieze derivabilitatea funcţiei g pe $\mathbb{R}$.
b) Să se aplice teorema lui Lagrange funcţiei g pe intervalul $[-1, 1]$ şi să se găsească punctul intermediar din teorema lui Lagrange.

III. Geometrie 1. Fie ABC un triunghi echilateral, M un punct oarecare în interiorul triunghiului şi A_0, B_0, C_0 proiecţiile ortogonale ale lui M pe laturile $[BC]$, $[AC]$ respectiv $[AB]$.
a) Demonstraţi că valoarea sumei $MA_0 + MB_0 + MC_0$ este independentă de alegerea punctului M.
b) Demonstraţi egalităţile:

$$AB_0^2 + BC_0^2 + CA_0^2 = AC_0^2 + BA_0^2 + CB_0^2,$$
$$AB_0 + BC_0 + CA_0 = AC_0 + BA_0 + CB_0.$$

2. Într-un sistem cartezian xOy considerăm punctele $A(1, 3)$, $B(3, 4)$ şi $C(-2, 9)$.
a) Demonstraţi că triunghiul ABC este dreptunghic.
b) Calculaţi coordonatele centrului Q al cercului circumscris triunghiului ABC.
c) Calculaţi coordonatele punctului D pentru care $ABCD$ este paralelogram.
d) Pentru fiecare $m \in \mathbb{R}$ considerăm punctul $P_m(2m + 3, -3m + 4)$. Determinaţi m astfel încît distanţa P_mQ să fie minimă.

IV. Informatica Să se rezolve următoarele cerinţe într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal/C/C++):

a) Dându-se două cuvinte reprezentate ca şiruri de caractere peste alfabetul $\{a, \ldots, z\}$ (litere mici, fără diacritice), să se verifice dacă unul dintre cuvinte este anagramă a celuilalt.

Un cuvânt este anagramă a altui cuvânt dacă este format din exact aceleaşi litere, aranjate într-o altă ordine. Exemplu: *caras* şi *scara*.

b) Dându-se o mulţime de n cuvinte peste alfabetul $\{a, \ldots, z\}$, să se verifice dacă printre elementele mulţimii date există anagrame.

c) Există o soluţie la punctul b) de complexitate timp $O(n \log n)$? Dacă da, daţi o astfel de soluţie.

Pentru fiecare soluţie se va preciza argumentat complexitatea timp a algoritmilor folosiţi şi se vor explica informal detaliile de implementare sub formă de program: variabile, structuri de date, structuri iterative, instrucţiuni condiţionale.

Timp de lucru: 3 ore.