PROBLEMA 2 – Lift 100 puncte

Autor: Student **Valentin Roşca**, Facultatea de Informatică, Universitatea Al. I. Cuza Iaşi

Soluţii – stud. Valentin Rosca, stud. Liana–Ştefania Ţucăr

Presupunem că $x$ este pozitiv.

Calculăm suma $s=F_1+F_2+\ldots+F_k$ cu număr minim de termeni consecutivi din Şirul lui Fibonacci, astfel încât $s \geq x$ şi $s-x$ să fie par.

Cazul 1. Dacă $x=s$, atunci soluţia este: $k$ ++…+ (k semne de +).

Cazul 2. Dacă $x<s$, fie $y=s-x=2*z$ ($y$ este număr par, prin construcţia lui $s$).

Îl scriem pe $z$ ca sumă cu număr minim de termeni consecutivi din şirul lui Fibonacci: $z=F_{i1}+F_{i2}+\ldots+F_{ip}$.

Din relaţia $s-x=2*z$ deducem că $x=s-2*z= F_1+F_2+\ldots+F_k -2*(F_{i1}+F_{i2}+\ldots+F_{ip})$.

Se obţine astfel o sumă algebrică de termeni consecutivi din Şirul lui Fibonacci. Din această reprezentare a lui s, construim soluţia.

Dacă $x$ este negativ, atunci procedăm în mod similar pentru $-x$ urmărind acelaşi algoritm, dar schimbând la sfârşit semnele (din plus în minus şi invers).

Demonstrăm că suma astfel formată are număr minim de termeni.

Presupunem prin reducere la absurd că există o altă reprezentare a lui $x$, care să conţină un număr $q$ de termeni din şirul lui Fibonacci, mai mic decât $k$.

În această ipoteză $x=F_1+F_2+\ldots+F_m - 2*( F_{i1}+F_{i2}+\ldots+F_{iq})$ $(q \leq m)$

Rezultă că $F_1+F_2+\ldots+F_m-x$ este par şi pozitiv, cu $m<k$, ceea ce este absurd, din modul de construcţie a lui $k$.